MATEMÁTICAS Y LITERATURA 6

“EL CURIOSO INCIDENTE DEL PERRO A MEDIANOCHE”

1. Un vistazo general a algunos temas matemáticos

Vamos a comenzar echando un vistazo general al libro, fijándonos en los temas matemáticos que van apareciendo en sus páginas. Para ello solamente debes anotar, al lado de cada tema, la página o páginas del libro donde aparece mencionado.

TEMA MATEMÁTICO	PÁGINA/S
Formas de rellenar o embaldosar el plano	
Direcciones y vectores en el espacio	
La búsqueda y situación de un lugar en un Plano	
Magnitudes inversamente proporcionales	
El volumen de un cubo	
La población de animales y el descubrimiento de Robert May...	
Ternas Pitagóricas	
Números Primos	
El juego de “Los soldados de Conway”	
Fórmula logarítmica para la obtención de números primos	
Probabilidades y el problema de Monty Hall	
Probabilidades y el origen de la vida	
Potencias de 2	
Ecuaciones de segundo grado	

2. Las Matemáticas también tienen normas

"...la gente se salta las normas constantemente. Por ejemplo, Padre conduce muchas veces a mas de 30 millas por hora en una zona limitada a 30 millas por hora, y otras conduce después de haber bebido, y con frecuencia no se pone el cinturón de seguridad. Y la Biblia dice No matarás pero hubo unas cruzadas y dos guerras mundiales y la guerra del golfo y en todas ellas hubo cristianos que mataban gente." (pág. 46).

Aunque el párrafo anterior daría mucho de sí, no vamos a entrar en él. Nos vamos a ceñir a algunas normas que hay que tener en cuenta cuando estamos trabajando en matemáticas. Por ejemplo, cuando trabajamos con números hay que tener en cuenta lo que denominamos jerarquía de operaciones.

A) ¿En qué consiste la jerarquía de operaciones? Pon ejemplos.

Te mostramos a continuación las operaciones incorrectas efectuadas por algunos alumnos:

- $3+5.4=8.4=32$ - $(3+4)^2=3^2+4^2$ - $3^2+4^2=7^2=49$
- $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$ - $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{3}{6}$ - $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

B) Analiza los pasos dados, averigua los errores cometidos y efectúa correctamente las operaciones.

Ahora te presentamos una demostración de que 1 = 2. Sí, sí, has leído bien, vamos a demostrar que 1 = 2.

Suponemos que a, b son números no nulos y que a = b.

Multiplicando por a tenemos: $a^2 = a.b$

Restando b^2 en los dos miembros obtenemos: $a^2 - b^2 = a.b - b^2$

Descomponiendo en factores y sacando factor común queda:

$$(a + b).(a - b) = b(a - b)$$

Simplificando en los dos miembros el factor (a – b) nos queda:

$$a + b = b$$

Como a = b, podemos sustituir a por b y queda 2b = b

Como b es cualquier número no nulo, hacemos por ejemplo b = 1, y queda 2 = 1, como queríamos demostrar. Fíjate que si hacemos b = 7, obtenemos 14 = 7, y así con otros ejemplos que tú quieras poner..

C) Repasa la demostración y encuentra el fallo, porque sin duda tiene que haber algo de lo que hemos hecho que, en matemáticas, no está permitido. ¿Qué es?

D) Busca alguna "demostración" parecida que contenga algún fallo y que sorprenda por su resultado final.

3. Razonamientos encadenados

"Y cuando cruzaba la calle tuve un momento de inspiración sobre quién podía haber matado a Wellington. Articulé una Concatenación de Razonamientos en mi mente que era como sigue:..." (pág. 61).

En nuestra vida cotidiana estamos haciendo continuamente razonamientos encadenados. Por ejemplo, una compañera de tu clase dice las siguientes frases::

1. "En este trimestre he sacado en matemáticas un 6, un 8 y un 4."
2. "Por tanto aprobaré."
3. "Además creo que el profesor me pondrá un 6 como nota en la evaluación."

Suponiendo que las tres notas cuenten lo mismo, y que no se tienen en cuenta más cosas para la calificación final de la evaluación, demuestra que:

A) La frase 2 es cierta.

B) La frase 3 es cierta.

Para hacer la media de las notas anteriores, unos alumnos hacen los siguientes cálculos:

a) $\frac{6+8+4}{3}=6$ b) $\frac{6+8}{2}=7;\quad \frac{7+4}{2}=5{,}5$ c) $\frac{8+4}{2}=6;\quad \frac{6+6}{2}=6$

C) Explica si estos métodos de calcular la media son correctos o incorrectos y comenta sus causas.

Si ahora suponemos que la tercera nota cuenta el triple que las otras dos, demuestra que:

D) La frase 2 es cierta.

E) La frase 3 no es cierta. ¿Cuál es entonces la nota de la evaluación?

Para que suspendiera la evaluación, de las siguientes alternativas ¿cuál debería ocurrir?:

F) La nota 4 cuenta el cuádruplo que las otras.

G) La nota 4 cuenta más del cuádruplo que las otras.

H) La nota 6 cuenta la mitad que las otras.

4. La *navaja de Occam* en matemáticas

"... la navaja de Occam no es una navaja con la que los hombres se afeitan sino una ley, y dice:

Entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem

Que es latín y significa:

No ha de presumirse la existencia de más cosas que las absolutamente necesarias." (pág. 120).

Esta frase se debe a un monje franciscano llamado Guillermo de Occam.

A) Recoge los principales datos biográficos de este monje y filósofo.

En matemáticas podríamos enunciar *la navaja de Occam* así: "Nunca han de suponerse más cosas que las absolutamente necesarias".

Por ejemplo, si un alumno, ante la situación de la cuestión 4 dice:

- Sí, las tres notas cuentan lo mismo, pero como tú tienes el cuaderno muy mal, el profesor te va a suspender.

A) Analiza este razonamiento, teniendo en cuenta toda la información que se daba en la cuestión 4, y explica porqué es falso.

Para acabar estas preguntas, te proponemos analizar un chiste. Sí, sí, pero sin reírte demasiado.

B) Lee el chiste del economista, el lógico y el matemático, de las páginas 177-178, y relaciónalo con *la navaja de Occam.*

5. Es muy bueno tener un Plan...

"Y entonces Formulé un Plan. Y eso me hizo sentir mejor porque había algo en mi cabeza que tenía un orden y unas pautas y tan solo tenía que seguir las instrucciones una detrás de otra." (pág. 166).

Aunque hayas pensado inicialmente en otro tipo de *plan*..., por la cita puedes entender que vamos a hablar de un *plan* relacionado con la resolución de situaciones problemáticas.

Para resolver un problema, en matemáticas pasa como en la vida cuando estamos ante una situación complicada, o si tenemos que tomar una decisión: uno debe plantearse un plan con unos pasos que nos permitan llegar a la solución.

A) Resuelve el siguiente problema y luego escribe los pasos del Plan que has llevado a cabo:

¿Cuántos cuadrados se pueden dibujar en un tablero de ajedrez, de manera que sus lados sean líneas del tablero?

A lo largo del siglo XX varios matemáticos han investigado el proceso de resolución de problemas. Uno de ellos ha sido George Polya. Él decía que cuando uno resuelve problemas de matemáticas atraviesa por cuatro fases o etapas:

- Comprensión del enunciado.
- Elaboración de un plan.
- Puesta en práctica o ejecución del plan.
- Visión retrospectiva o vuelta atrás.

B) Haz un comentario sobre cada una de esas etapas. ¿En qué te parece que pueden consistir?

C) Recoge los principales datos biográficos de G. Polya.

También en España ha habido un matemático que ha hecho importantes aportaciones a este tema

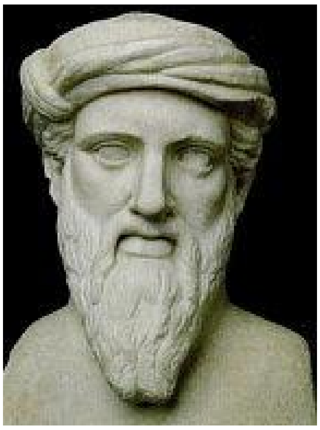
en el siglo XX; se llamaba Miguel de Guzmán Ozámiz y ha sido el matemático español más importante del siglo XX.

Te vamos a proponer unas actividades relacionadas con él para que lo conozcas un poco. Para ello puedes acudir a la red o a su página web.

D) Recopila los principales datos de su biografía.

E) Escoge un problema de alguno de sus libros y resuélvelo.

6. Desde las ternas pitagóricas...



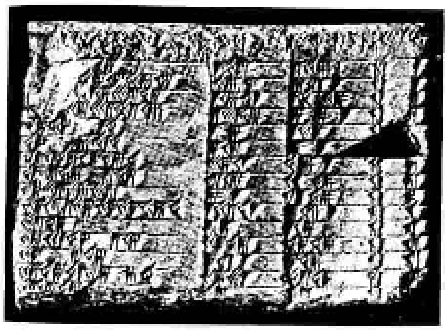
" Y ésta era mi pregunta favorita
Demuestra el siguiente resultado:

Un triángulo cuyos lados pueden escribirse en la forma n^2+1, n^2-1 y $2n$ (donde n es mayor que 1) es rectángulo.

*Demuestra, mediante un ejemplo opuesto, que el caso inverso es falso."(*pág. 257)

En esta pregunta del examen de Christopher se habla de números y de triángulos rectángulos. Eso está relacionado con una idea que te vamos a explicar:

Una terna pitagórica son tres números enteros a, b, c que cumplen el teorema de Pitágoras, es decir: $a^2+b^2=c^2$. O lo que es equivalente, a, b y c pueden ser las longitudes de los tres lados de un triángulo rectángulo. En la figura puedes observar la Tablilla Plimpton, de la cultura mesopotámica, cuyo origen se sitúa alrededor del año 1800 antes de Cristo, en la que ya aparecen unas ternas pitagóricas.



A) Investiga y averigua qué ternas pitagóricas aparecen en esas tablillas.

En la página 265 del libro aparece la demostración de la pregunta de la cita anterior.

B) Demuestra tú también que n^2+1, n^2-1 y 2n forman una terna pitagórica. Después da ejemplos de triángulos rectángulos concretos cuyos lados tengan las expresiones anteriores.

El enunciado inverso del de la pregunta del examen es: "Si un triángulo es rectángulo, entonces sus lados pueden escribirse en la forma

n^2+1, n^2-1 y $2n$ (donde n es mayor que 1).” En matemáticas en cuanto un enunciado admite un ejemplo en el que no se cumple, entonces el enunciado es falso.

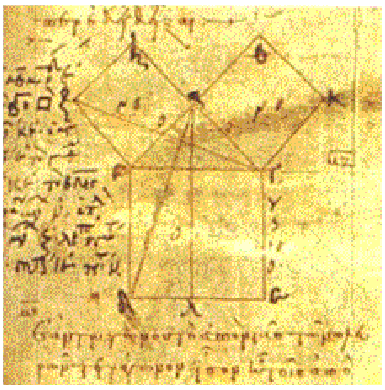
C) Demuestra que el enunciado inverso anterior es falso mediante un ejemplo diferente al que propone Christopher en la página 267.

Las expresiones anteriores, n^2+1, n^2-1 y $2n$ son un caso particular de las expresiones n^2+p^2, n^2-p^2 y $2np$ (cuando p=1).

D) Demuestra que estas tres expresiones también forman un terna pitagórica.

E) investiga y encuentra las expresiones de otras ternas pitagóricas.

7. ... Hasta el Teorema de Pitágoras

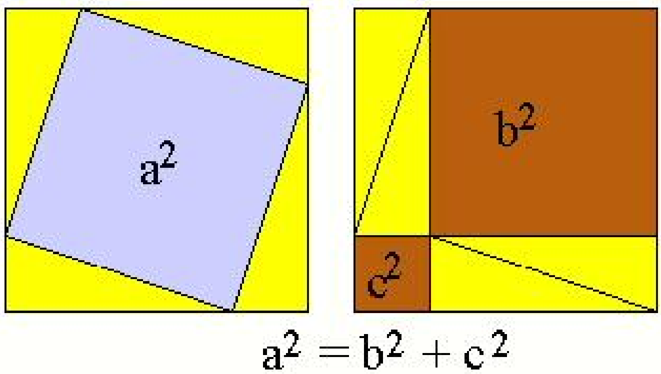


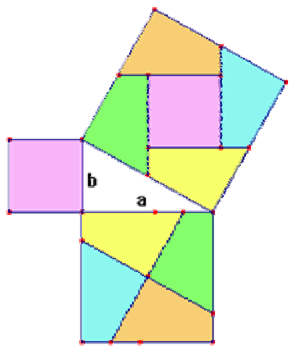
Hemos hablado anteriormente de uno de los teoremas más famosos de la historia: el teorema de Pitágoras.

A) ¿Cuál es su enunciado? ¿Cuál es su significado geométrico?

A lo largo de la historia de las matemáticas se ha demostrado el teorema de Pitágoras de muchas formas.

B) Estudia las figuras siguientes y explícalas, porque son dos demostraciones gráficas del teorema.





Los triángulos rectángulos tiene unas propiedades muy interesantes. Una de ellas representa, en cierto modo, una generalización del teorema de Pitágoras. La podríamos enunciar de la siguiente forma:

“Si sobre los tres lados de un triángulo rectángulo construimos figuras geométricas semejantes entre sí, se cumple que la suma de las áreas de las figuras construidas sobre los catetos es igual al área de la figura construida sobre la hipotenusa.”

Según la propiedad anterior, el teorema de Pitágoras sería un caso particular, correspondiente a cuando dibujemos sobre cada lado un cuadrado.

C) Demuestra que se cumple la propiedad si construimos sobre cada lado triángulos equiláteros.

D) ¿Y si son exágonos regulares? Demuéstralo para un polígono regular de cualquier número de lados.

E) Haz lo mismo para cuando sean semicírculos cuyo diámetro sea igual a cada uno de los lados.

8. Es muy bueno tener estrategias para tranquilizarse

" Así que hice respiraciones profundas tal como Siobhan me había dicho... y conté cincuenta respiraciones e hice cubos de los números cardinales mientras contaba, así:

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, 1331, 1728, ...etc" (pág. 256)

No hemos puesto todos los cubos de la página 256, porque nos parecían muchos, pero si necesitas acudir a ellos para contestar a las siguientes cuestiones, lo puedes hacer.

A) ¿Cuál es el menor número cuyo cubo acaba en 44?

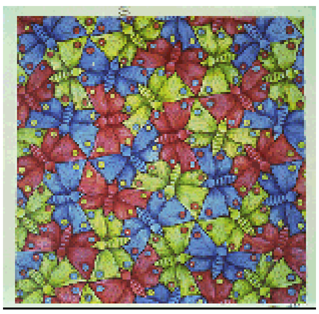
Las preguntas siguientes no son tan inmediatas, y te pueden generar sensaciones como las de Christopher.

B) ¿Cuál es el menor número cuyo cubo acaba en las cifras 888?

C) ¿Cómo son, en general, los números cuyo cubo acaba en 888?

9. Rellenando el plano sin dejar huecos ni solapamientos

En la página 246 podemos ver un embaldosado del plano hecho con cruces. Aquí te presentamos otros mosaicos curiosos:



Como puedes observar, el del medio es real, y en cualquier colmena lo podemos ver. Los otros dos corresponden a diseños realizados por un pintor holandés del siglo XX llamado M. C. Escher.

Aunque nunca te hayan hablado de ello, es fácil que comprendas lo que entendemos en matemáticas por un mosaico: es cualquier forma de rellenar el plano con figuras, sin dejar huecos sin rellenar ni solapar (montar) unas con otras; debe quedar como los que te hemos presentado más arriba.

Las Matemáticas también se han ocupado de averiguar qué tipos de figuras sirven para conseguir cubrir el plano con esas condiciones y otras que se quiera añadir. En la cultura árabe hay muchísimos buenos ejemplos de mosaicos, y a lo largo de la historia nos han dejado muchos de ellos en monumentos magníficos: la Alhambra de Granada es uno de ellos.

Volviendo a los ejemplos mostrados anteriormente, podemos ver que el mosaico de las abejas está hecho con un polígono regular.

A) ¿De qué polígono estamos hablando?

B) ¿Con qué otros polígonos regulares es posible hacerlo? Los mosaicos construidos de esta forma se llaman mosaicos regulares. ¿Por qué no los podemos conseguir con otros tipos de polígonos regulares?

C) Analiza la posibilidad de que cualquier cuadrilátero pueda rellenar el plano y formar, por tanto, un mosaico.

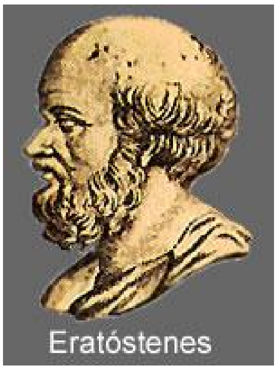
D) Investiga lo qué es un mosaico semirregular y averigua los que hay.

E) Estudia otras formas de rellenar el plano usando polígonos u otras figuras, como por ejemplo las de Escher.

10. Los números primos

"Yo creo que los números primos son como la vida. Son muy lógicos pero no hay manera de averiguar como funcionan, ni siquiera aunque pasaras todo el tiempo pensando en ellos." (pág. 23)

Vamos a dedicar un rato a pensar en los números primos, para conocer algunas de sus peculiaridades. Ánimo y verás como acabas satisfecho; los primos nunca defraudan...



Uno de los primeros matemáticos que estudiaron los números primos fue Eratóstenes, aunque también es conocido por otros logros en matemáticas.

A) Explica cómo se hace la criba de Eratóstenes. Hazla para obtener los números primos entre los 100 primeros números naturales.

B) Este matemático calculó con mucha exactitud una magnitud del planeta Tierra. ¿Cuál es, cómo lo hizo y cuál fue el valor encontrado?

Otro matemático importante, Euclides, demostró que hay infinitos números primos.

C) Averigua cómo lo hizo y exponlo aquí.

Euclides escribió unos cuantos libros, que son los más famosos de la historia de las matemáticas.

D) Averigua el título, cuántos libros fueron y explica su contenido.

Avancemos en el tiempo unos cuantos siglos y situémonos en Suiza. Un profesor de matemáticas de este país, llamado Cristian Goldbach, mantenía correspondencia con Euler, un famoso matemático de la misma nacionalidad. En una de las cartas, Goldbach le confía a Euler un posible resultado sobre números primos, que él creía cierto, pero que no era capaz de demostrar. Euler tampoco consiguió hacerlo y lo denominó Conjetura de Goldbach.

E) ¿En qué consiste esta conjetura? Prueba con casos particulares sencillos, a ver si se cumple.

F) ¿Por qué se le llama conjetura en vez de teorema?

Si quieres saber más sobre esta conjetura, puedes comenzar leyendo otra novela interesante *El tío Petros y la Conjetura de Goldbach,* de la que también tenemos un guión para trabajar las matemáticas con su lectura.

Por último, ya en el siglo XX, vamos a comentarte una aplicación nueva de los números primos: los usan los servicios secretos de los países a la hora de crear claves para elaborar mensajes secretos, que no los puedan descifrar los espías de otros gobiernos, o los enemigos, en caso de conflictos o de guerra. Esto forma parte de lo que se denomina Criptografía o “escritura escondida”.Es una parte muy compleja de las matemáticas y nos contentamos con que sepas que existe.

De cualquier forma, nos gustaría plantearte algo sencillo relacionado con la Criptografía en sus inicios. Para ello te vamos a escribir de tres formas distintas, en clave, la frase EL CURIOSO INCIDENTE.

G) Tienes que averiguar, en cada caso, cómo lo hemos hecho:

1: LEUCOIROSNIICNEDET.

2: LEOSOIRUCETNEDICNI.

3: ETNEDICNIOSOIRUCLE.

Aprovecha para explicar algún otro método de cifrar mensajes que conozcas o que te hayan contado.

11. Las potencias de un número

“Calculé potencias de 2 en mi cabeza porque me tranquilizaba. Logré llegar hasta 33554432 que es 2^{35} ...” (pág. 153)

Como podemos ver, Christopher era capaz de llegar hasta el resultado de 2^{45} mentalmente. ¡Casi nada ...!

A) Sinceramente, ¿hasta qué potencia de 2 eres capaz de calcular mentalmente? Hazlo y contesta después.

Para compensar que no somos capaces de llegar a 2^{45}, vamos a calcular otras cosas de esos números.

B) ¿Cuáles son las posibles cifras de las unidades de los números que son potencias de 2? Aprovecha el resultado para calcular la cifra de las unidades de 2^{45}.

Hay varios problemas famosos en los que intervienen potencias de 2. Uno de ellos es el del problema del inventor del ajedrez.

C) Investiga su enunciado y la resolución del mismo.

D) Si en vez de operar con potencias de base 2, lo hiciéramos con potencias de base otro número (menor que 10), ¿qué ocurriría? Completa la tabla siguiente teniendo en cuenta las indicaciones que te damos más abajo y lo podrás deducir razonadamente:

BASES DE LAS POTENCIAS

EXPONENTES

	2	3	4	5	6	7	8	9
1								
2								
3						3		
4							6	
5		3						
6								
7								
8								

En esta tabla, los números de la primera fila son las bases de las potencias, los números de la primera columna son los exponentes de las mismas y los demás, que debes calcular, son las cifras de las unidades de las potencias; por ejemplo, la cifra de las unidades de 3^5 es un 3, que hemos puesto en su correspondiente lugar de la tabla. Análogamente hemos calculado las unidades de las potencias 8^4 y 7^3, que son 6 y 3 respectivamente.

E) Con la tabla anterior no tendrás ninguna dificultad para calcular las terminaciones de los siguientes números:

$$7^{1000};\quad 4^{457};\quad 8^{743};\quad 3^{4130};\quad 2^{7047};\quad 9^{8132}.$$

12. Más cálculo mental

" ¿Cuánto vale 251 por 864? " (pág. 92)

Vuelve a leer cómo efectúa nuestro protagonista esta operación mentalmente.

A) ¿Qué te parece? ¿Tú haces habitualmente ese tipo de operaciones mentalmente?

B) Vamos a proponerte algunas operaciones parecidas, para que tú nos expliques cómo las haces mentalmente:

- 56324 multiplicado por 2
- 4138 multiplicado por 99
- 6234 dividido entre 2
- 643 multiplicado por 101

- 5648 dividido entre 4 - 354 multiplicado por 29

Recuerda que debes poner el resultado y explicar cómo los haces mentalmente.

Te vamos a contar un método para obtener mentalmente el resultado de multiplicar un número de dos cifras por 11. Para ello te vamos a poner varios ejemplos:

42 . 11 = 462 34 . 11 = 374 63 . 11 = 693

58 . 11 = 638 75 . 11 = 825 39 . 11 = 429

C) Con esos ejemplos, ¿has podido averiguar en qué consiste el método?

D) Aplícalo para calcular los productos: 87 . 11 y 68 . 11

E) Atrévete a investigar cómo puedes obtener el resultado de multiplicar un número de tres cifras por 11. ¡Ánimo!

13. La mentira y los mentirosos

"Yo no digo mentiras. Madre solía decir que era así porque soy buena persona. Pero no es porque sea buena persona. Es porque no sé decir mentiras." (pag. 32).

Así comienza el capítulo numerado como 37 (según el orden adoptado por Christopher) y lo vamos a aprovechar para reflexionar sobre la mentira como cuestión de debate en lógica y sobre personajes mentirosos. Puedes estar tranquilo/a; las preguntas no van ser sobre la frecuencia de tus mentiras, ni si eres mentiroso o no...

La primera situación está sacada de la Segunda Parte de El Quijote, más concretamente del capítulo XLV. Trata sobre una situación que debe resolver Sancho Panza siendo gobernador de la ínsula Barataria, ya que a él corresponde impartir justicia y resolver los conflictos y litigios. Esta es la situación que le presentan sus vasallos y que él debe resolver:

Señor, un caudaloso río dividía dos términos de un mismo señorío (...). Sobre este río estaba una puente, y al cabo de ella, una horca y una casa de audiencia, en la cual de ordinario había cuatro jueces que juzgaban la ley que había puesto el dueño del río, de la puente y del señorío, que era en esta forma:

"Si alguno pasare por esta puente de una parte a otra, ha de jurar primero adónde y a qué va; y si jura verdad, déjenle pasar, y si

dijere mentira, muera por ello ahorcado en la horca que allí se muestra, sin remisión alguna". Sucedió, pues, que tomando juramento a un hombre, juró y dijo que iba a morir en aquella horca que allí estaba, y no a otra cosa. Repararon los jueces...

A) Si los cuatro jueces no sabían que hacer, ¿cómo crees que debe resolver Sancho la situación aplicando la lógica? En matemáticas, a las situaciones de este tipo se les denominan paradojas.

B) Realmente en El Quijote, el gobernador Sancho piensa en lo que haría su señor y decide que... Busca tú en un ejemplar de El Quijote y averigua lo que pasó para poder así acabar la frase anterior.

La otra situación que presentamos ocurrió en un país imaginario donde hay habitantes de dos clases: los que siempre dicen la verdad y los que siempre mienten.

14. Una ventana a la Teoría matemática del Caos

"He aquí una fórmula para una población de animales $N_{nueva} = l \cdot (N_{vieja}) \cdot (1 - N_{vieja})$*"* (pág. 132)

La ecuación anterior se llama de P. F. Verhulst, que fue un científico que estudió el crecimiento demográfico y la planteó en 1845.

Para simplificar las cosas y que todos la entendamos mejor, vamos a escribir la fórmula así $N' = l \cdot N(1 - N)$, donde N es la población vieja (del año anterior), N' es la población nueva (del año siguiente) y l es una constante que llamamos de fertilidad, que puede cambiar con las condiciones ambientales, de alimentación, depredadores, climáticas, etc. Suponemos, para trabajar con números sencillos, que N y N' son números entre 0 y 1 y que representan los millones de individuos de esa especie.

A) Comprueba que si $l < 1$, la población es cada vez más pequeña y se extingue. Hazlo para los casos $l = 0{,}5$ y $N = 0{,}8$, calculando la población en años sucesivos.

B) Si $l = 1{,}5$ y la población inicial es 0,1, puedes comprobar que al cabo de 3 años la población será de 0,21676. ¿La población va creciendo? Comprueba que se va estabilizando hacia el valor 0,3333. ¡Y esto ocurre aunque el tamaño inicial sea otro! Compruébalo.

C) Verifica que si $l = 2{,}5$,la población se estabiliza en las cercanías del valor 0,6.

D) En el caso $l = 3{,}2$, puedes comprobar que la población se estabiliza en valores cercanos a 0,5 y 0,8; un año en uno de ellos y al siguiente en el otro.

E) En el caso de $l = 3{,}5$ la población se acerca a cuatro valores: 0,38; 0,83 y otros dos valores que debes descubrir por tus propios medios.

F) Comprueba que para $l = 3{,}57$ aparece el caos; es decir, no podemos predecir el resultado de un año sabiendo el del año anterior.

Como dice Christopher en el libro, esto fue estudiado en el siglo XX por el biólogo Robert May junto con otras personas.

Estos resultados, junto con los de otras situaciones, fueron la base para la aparición de un nuevo campo de las matemáticas que estudia este tipo de fenómenos y que se denomina Teoría del Caos.

G) Describe alguna otra situación en la que podamos encontrar el caos.

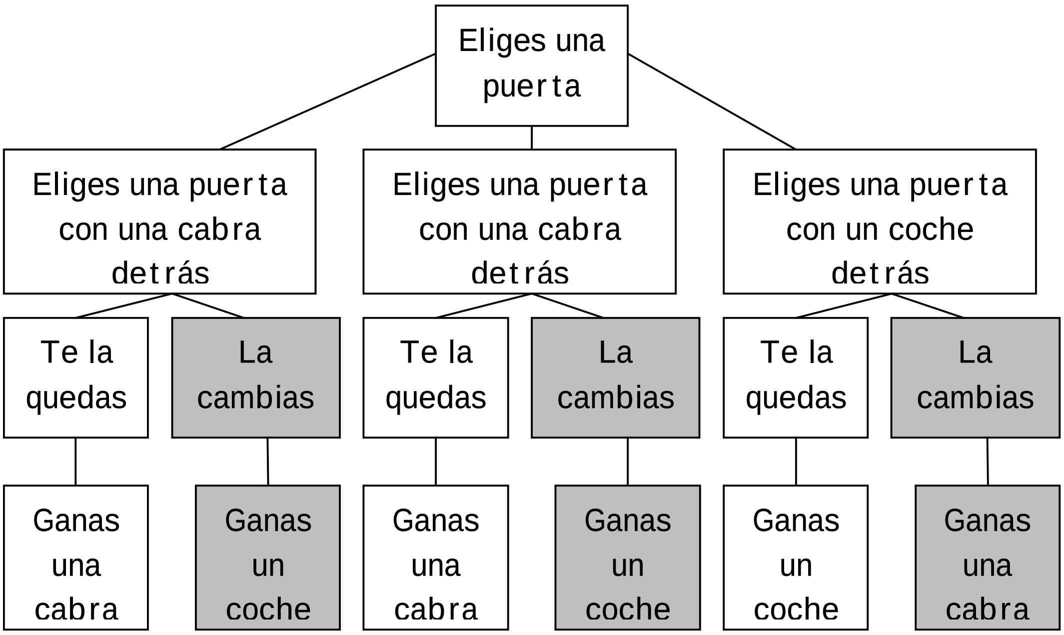
15. El cálculo de probabilidades a veces tiene... "cabra encerrada"

"... los números son a veces muy complicados y en absoluto sencillos." (pág. 90)

Vuelve a leerte el capítulo 101, porque vamos a centrar nuestra mirada en él. Como sabes ahí está la increíble, pero verídica, historia del *problema de Monty Hall*. Con toda la información puedes contestar a las siguientes preguntas:

A) Cuenta el desarrollo del concurso.

B) Explica una de las dos formas de resolverlo que aparecen en el libro. ¿Se entienden las dos o una es más sencilla que la otra? Puedes ayudarte del esquema gráfico siguiente, sacado del libro:



C) ¿Qué te parecen las cartas enviadas a la revista por matemáticos con mucha experiencia? Haz algún comentario de alguna de ellas.

D) Comenta el primer párrafo de la página 90 sobre lo engañosa que puede ser la intuición.

16. Un paseo por el azar y las probabilidades

Vamos a dejar el famoso problema anterior y nos vamos a poner a pensar en el azar en general y en las probabilidades. Por ejemplo, cuando hablamos de probabilidades usamos frases como las siguientes:

a. No puede ocurrir. b. Ocurre casi siempre.

c. No ocurre muy a menudo. d. Ocurre siempre.

e. Ocurre muy a menudo.

También se suele decir:

1. Muy probable. 2. Improbable. 3. Imposible

4. Probable. 5. No muy probable.

A) Establece una relación entre las frases con letra y las de los números, si significan lo mismo. Puede ocurrir que una misma letra se relacione con varios números.

La teoría de probabilidades surgió a partir del análisis de juegos de azar... Pascal, a petición de un jugador profesional llamado el caballero de Méré, analizó, junto con otros matemáticos de la época, las posibilidades de ganar en unos juegos de dados. Como resultado de todo ello nació el estudio matemático del azar.

Para que te desafíes a ti mismo, te presentamos unos ejemplos de problemas sencillos sobre azar y probabilidades

B) Ana y Pedro juegan con un dado: si sale un 2, un 3, un 4, un 5 ó un 6, entonces gana Ana 1€. Si sale un 1 gana Pedro. ¿Cuánto debería ganar Pedro para que el juego sea justo, o dicho de otro modo equitativo?

C) Un profesor mandó, como tarea, tirar una moneda a Ana y a Pedro (100 veces a cada uno). Deben anotar un 1 si sale cara y un 0 si sale cruz. Al día siguiente, cuando el profesor solicitó los resultados, le entregaron las siguientes secuencias:

Ana: 101011011000110101100011101100011010011101001010
1010010011101110100100110101110010011010110011001011
Pedro:1110010000011101000011001110001111000000010111001
00011111110000100111010000001111000010101101000001111

El profesor, al observar las secuencias dedujo que uno de ellos había hecho trampa y no había lanzado la moneda, sino que había escrito los resultados que le habían parecido. ¿Quién hizo trampa? ¿Cómo lo ha sabido?

D) Si suponemos que el nacimiento de un niño es igual de probable que de una niña, de los sucesos siguientes, ¿cuál crees que es más probable?:

1. Que de los 10 primeros bebés nacidos en un hospital haya 7 o más niñas.

2. Que de los 100 primeros bebés nacidos en un hospital haya 70 o más niñas.

17. Las ecuaciones de segundo grado: una particular forma de pasar el rato

"Entonces practiqué un poco de mates en mi cabeza, resolviendo ecuaciones de segundo grado, utilizando la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

(pág. 199)

En el libro se habla de ecuaciones de segundo grado como si todo el mundo las conociera...

A) ¿Tú sabes lo que es una ecuación de segundo grado?

Si tu respuesta es negativa contesta las a las cuestiones B_1, C_1, ..., y si es positiva contesta a las preguntas B_2, C_2, ...

Para que a partir de ahora sepas algo sobre las ecuaciones de segundo grado, te podemos decir que son ecuaciones en las que figura la x elevada al cuadrado. Por ejemplo:

$$2x^2+x=x^2-5x; \qquad x^2+5x=-6; \qquad -6x+x^2+9=0; \qquad x^2-9=0$$

En general, si ordenamos la ecuación, agrupamos y operamos los términos semejantes, podemos escribirla de la forma: $ax^2+bx+c=0$, siendo a, b, c números reales y a distinto de cero. La fórmula de arriba sirve para resolver la ecuación, o lo que es lo mismo, calcular el valor de x que la verifica, al sustituir en la fórmula a, b, c por sus valores concretos.

B_1) ¿Por qué crees que a debe ser necesariamente distinto de cero?

C_1) Tanteando y dando valores adecuados a x, encuentra las soluciones de las ecuaciones de segundo grado siguientes:

$$x^2-9=0; \qquad x^2-x=0; \qquad x^2-2x+1=0$$

D_1) Aplicando la fórmula del principio, resuelve las ecuaciones:

$$x^2-5x+6=0; \quad x^2-x-2=0; \quad x^2+2x+1=0; \quad x^2+x+1=0$$

E_1) Analizando los casos anteriores y alguno más si hace falta, ¿podrías decirnos cuántas soluciones puede tener una ecuación de segundo grado?

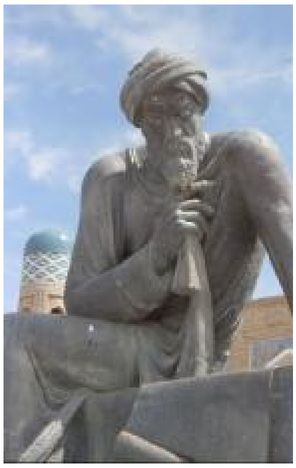
Las siguientes cuestiones son para los que ya conocen lo que es una ecuación de segundo grado...

B_2) Aplica la fórmula para resolver las ecuaciones que aparecen en la página 201 del libro.

C_2) Algunas ecuaciones de segundo grado se llaman incompletas. ¿Qué significa eso? Resuelve, sin usar la fórmula, algunas ecuaciones de segundo grado incompletas y explica el método en función de la forma que tengan.

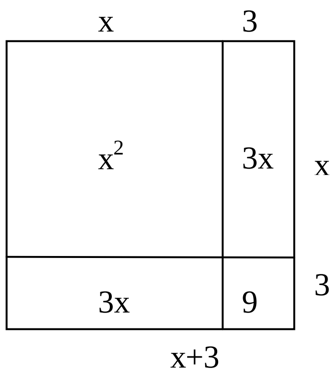
D_2) ¿Cuántas soluciones (iguales o distintas) puede tener una ecuación de segundo grado? ¿De qué depende?

El origen de la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado, tal y como la conocemos hoy en día, se basa en un proceso con operaciones algebraicas, con letras y números, que tiene sus antecedentes en los métodos que usó en el siglo IX un matemático árabe, de cuyo nombre se deriva la palabra *algoritmo,* al que vamos a recordar ahora. Por cierto, las fotos pertenecen a un monumento dedicado a su memoria.



E$_2$) ¿De qué personaje estamos hablando? ¿En qué lugar del mundo está esa estatua conmemorativa? Y ya que estamos hablando de ecuaciones..., la palabra álgebra proviene del título de un libro de matemáticas que escribió él. ¿Cuál es el título del que hablamos?

Este matemático resolvió ecuaciones de segundo grado utilizando un método geométrico basado en figuras. Por ejemplo, imaginemos que tenemos que resolver la ecuación $x^2+6x-16=0$. La idea fundamental consiste en dibujar los términos de la ecuación mediante figuras sencillas: x^2 es el área de un cuadrado de lado x, 6x es el área de un rectángulo... Para ello construimos la figura siguiente:



Es un cuadrado de lado x+3, cuya superficie se puede calcular de dos maneras: elevando el lado al cuadrado o sumando las áreas de las partes que lo componen (los valores están en el interior de cada zona). Tenemos por tanto

$$(x+3)^2 = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9$$

Restando -16 a ambos lados, obtenemos:

$$(x+3)^2 -16 = x^2 + 6x + 9 -16$$

Como $x^2+6x-16=0$, queda:

$$(x+3)^2 -16 = 9; \qquad (x+3)^2 = 25$$

Por tanto $x + 3 = \pm\sqrt{25}$; $x + 3 = \pm 5$

Luego $x = 3\pm 5$; con lo que las soluciones de la ecuación son los valores $x_1 = 8$, $x_2 = -2$. Debemos hacer la salvedad de que la solución negativa no se consideraba en esa época, ya que no estaba claro el significado y la naturaleza de los números negativos. Además, en este caso, x representa la longitud del lado de un cuadrado y no puede ser negativa. En la actualidad, al resolver cualquier ecuación de segundo grado siempre se consideran las dos soluciones reales, sean positivas o negativas.

F_2) Resuelve la ecuación $x^2+4x-21=0$ usando el mismo método que hemos hecho anteriormente. Ten en cuenta que 4x debes representarlo mediante dos rectángulos de área 2x, añadidos al cuadrado de lado x.

G_2) Aunque pueda parecernos mentira, la fórmula general proviene de este método de resolverlas, y casi puedes conseguir deducirla si resuelves las siguientes cuestiones:

- Resuelve usando el método geométrico la ecuación $x^2+4x+c=0$, siendo c cualquier número.

- Resuelve con el mismo método la ecuación $x^2+bx+c=0$, siendo b y c cualesquiera números. Hay que tener en cuenta que uno de los lados de los rectángulos será b/2 y que manejar esta expresión tiene más dificultad, por lo que debes extremar el cuidado al operar con ella.

- Te queda el reto final: resolver la ecuación $ax^2+bx+c=0$. Verás que obtienes finalmente la famosa fórmula, pero no es un proceso fácil. La primera dificultad es darle forma geométrica a la expresión ax^2, y para ello debes multiplicar por a toda la ecuación, antes de hacer otra cosa; así a^2x^2 es el área de un cuadrado de lado... Sigue y lo conseguirás.

Si no has conseguido llegar a buen puerto con la cuestión anterior, te proponemos que, a cambio, resuelvas la siguiente:

H_2) Estudia la relación que existe entre las soluciones de las ecuaciones $ax^2+bx+c=0$ y $cx^2+bx+a=0$. Una vez que creas haberla encontrado debes demostrarla rigurosamente.

18. Un juego "...para despejarme un poco la cabeza"

En el libro aparecen algunos juegos, como por ejemplo el de *Los soldados de Conway* (pág. 182). Te proponemos que hagas un estudio de las reglas de este juego y contestes a las cuestiones que te proponemos en el guión siguiente:

A) Queremos tener tres fichas (o soldados) situadas una línea más arriba de la línea principal. ¿Cómo podemos conseguirlo?

B) Explica un forma sencilla de llegar dos líneas más arriba de la línea principal. Te puedes fijar en el primero de los ejemplos de la página 183.

C) ¿Podrías intentar llegar tres líneas más arriba de la primera línea horizontal? Dibuja el tablero resultante y explica cuáles son las ideas clave para conseguirlo.

19. Los exámenes... ¡Uf!

"Cuando abrí el examen y lo leí todo no supe cómo responder a ninguna de las preguntas, y además no podía respirar correctamente. Quería pegarle a alguien o ..." (pág. 255)

Esas o parecidas sensaciones son las que suelen provocar los verdaderos problemas cuando intentamos resolverlos.

¿Te ocurre a ti lo mismo? Cuéntanos alguna experiencia tuya durante algún examen.

20. Sobre las matemáticas

"El señor Jeavons decía que a mí me gustaban las matemáticas porque son seguras. Decía que me gustaban las matemáticas porque consisten en resolver problemas, y esos problemas son difíciles e interesantes, pero siempre hay una respuesta sencilla al final. Y lo que quería decir es que las matemáticas no son como la vida, porque al final en la vida no hay respuestas sencillas."

"Eso es así porque el señor Jeavons no entiende los números." (pág. 86).

A) ¿Te parecen ciertas las anteriores afirmaciones? ¿Cómo dirías tú que son las matemáticas?

Bibliografía

Una fuente de información a tener en cuenta es internet. La búsqueda adecuada puede dar buenos frutos, aunque muchas veces nos encontremos con muchas superficialidades. La adquisición y el fomento de criterios personales para cribar la información de la red, son recursos que debemos cultivar en nuestro alumnado, y debe formar parte del proceso de búsqueda e indagación que queremos que desarrollen.

En cuanto a la bibliografía con soporte escrito hemos seleccionado la siguiente:

-Allen Paulos, J. (1996) *"Un matemático lee el periódico".* Tusquets Editores, Barcelona.

-Briggs, J. y Peat, F.D. (1990) *"Espejo y Reflejo: del caos al orden".* Ed. Gedisa, Barcelona.

-Galende Díaz, J.C. (1995) *"Criptografía. Historia de la escritura cifrada"*. Ed. Complutense, Madrid.

-Polya, G. (1965) *"Cómo plantear y resolver problemas"*. Ed. Trillas, Mexico.